14/10/2019

Τι κάναμε την τελευταία εβδομάδα;

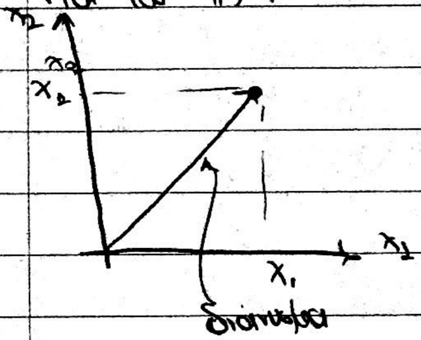
- Μια επισκόπηση συναρτήσεων με πολλές μεταβλητές.
- Ξεκινήσαμε να βλέπαμε τη δομή του $\mathbb{R}^n$

Στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε δύο πράξεις (πρόσθεση διαν. ~~[illegible]~~ και πολλαπλ. διαν. με πραγματικό αριθμό (ή βαθμωτό μέγεθος), εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, νόρμα (= μήκος) ενός διανύσματος, απόσταση δύο διανυσμάτων.

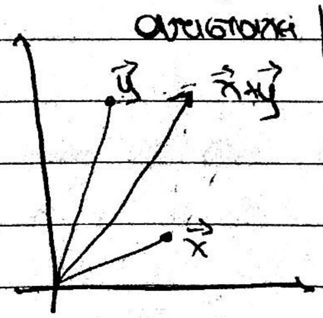
Ισχυρισμός: Με όλα αυτά μπορούμε να περιγράψουμε επαρκώς τον γεωμετρικό χώρο $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα:

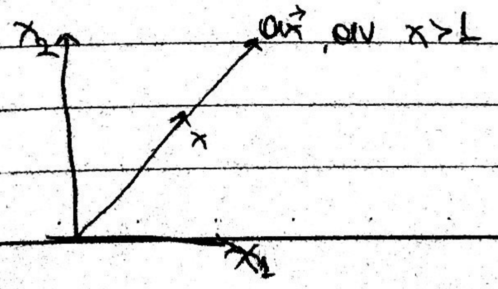
(a) Για τον $\mathbb{R}^2$: 1-1 αντιστοίχιση σημείων με διανύσματα



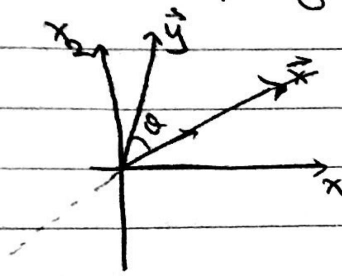
(b) $\vec{x}+\vec{y}$ (αλγεβρικά)
αντιστοιχεί με (γεωμετρικά):



(c) πολ. διαν. με αριθμό (αλγεβρικά) $a\vec{x}$, όπου $a \in \mathbb{R}$

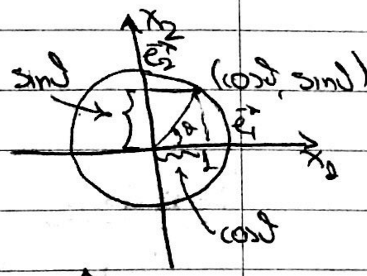


(d) Εσωτερικό γινόμενο $\vec{x}\cdot\vec{y} = (x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (αλγεβρικά)



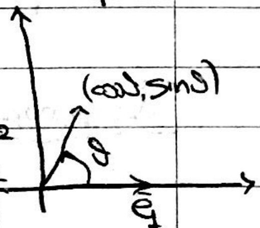
$\cos\theta = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$, όπου $\|\vec{x}\| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$ (γεωμετρικά)

αν $\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|>0$.



[Πώς το «βγάλαμε» αυτό; Είναι γενίκευση του εξής, από το οποίο προκύπτει $(\cos\theta, \sin\theta)\cdot\underbrace{(1,0)}_{\vec{e_1}} = \cos\theta$

Παρατηρούμε επίσης ότι $\left\|\dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right\| = 1 \quad \forall\, \bar{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}$



[Πράγματι $\left\|\dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right\| = \left(\dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\cdot\dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{x_1,\dots,x_n}{\|\bar{x}\|}\cdot\dfrac{x_1,\dots,x_n}{\|\bar{x}\|}\right)^{1/2}$

$= \left(\left(\dfrac{x_1}{\|\bar{x}\|},\dots,\dfrac{x_n}{\|\bar{x}\|}\right)\cdot\left(\dfrac{x_1}{\|\bar{x}\|},\dots,\dfrac{x_n}{\|\bar{x}\|}\right)\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i}{\|\bar{x}\|}\right)^2\right)^{1/2} =$

$= \left(\underbrace{\dfrac{1}{\|\bar{x}\|^2}}_{=\frac{1}{\bar{x}\cdot\bar{x}}}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=\bar{x}\cdot\bar{x}}\right)^{1/2} = 1$, αν, φυσικά, το $\bar{x}\cdot\bar{x} = \|\bar{x}\|^2 > 0$.

δηλ. ισοδύναμα, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$

$\underset{(2)\ (1)}{\Longleftrightarrow} \underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{=\bar{x}} \neq \underbrace{(0,\dots,0)}_{=\bar{0}}$

[Για το (1) $\overset{\text{νδο}}{\Rightarrow}$ δηλ. αρκεί ν.δ.ο. αν δεν ισχύει $\bar{x}\neq\bar{0}$, δηλ. αν ισχύει $\bar{x}=\bar{0}$, τότε $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ (το οποίο είναι τετριμμένο) $\Leftrightarrow \forall i=1,\dots,n \ x_i = 0$

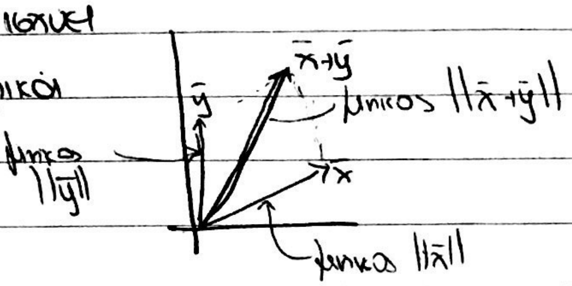
Για το (2). $\bar{x}\neq\bar{0} \Rightarrow \exists j=1,\dots,n,\ x_j\neq 0 \Rightarrow x_j^2>0$ και $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \underbrace{x_j^2}_{>0} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^2}_{\geq 0}$

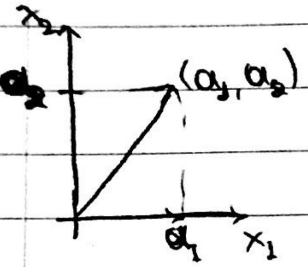
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$]

(e) νόρμα = (μήκος) διανύσματος

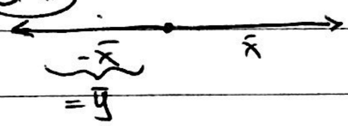
$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$ $\forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n$ και ειδικότερα, ισχύει

$\|\bar{x}+\bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (τριγ. ανισ.) που σημαίνει γεωμετρικά





$\|\bar{x}\| = \|\bar{y}\| \overset{?}{\Rightarrow} \|\bar{x}+\bar{y}\| \overset{?}{=} \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (όχι)



ενώ $\bar{x}+\bar{y} = \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{x} + (-1)\bar{x}$

$= (1 + (-1)\bar{x}) = 0\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow$

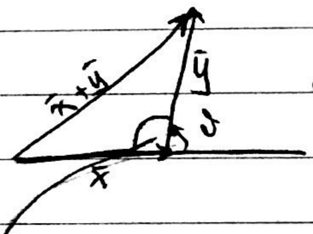
$|\bar{x}+\bar{y}| = 0 = \|\bar{x}\|.$

$\Rightarrow \|\bar{y}\| = \|-\bar{x}\| =$

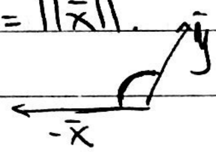
$= \|(-1)\bar{x}\| = \|(-x_1, \dots, x_n)\|$

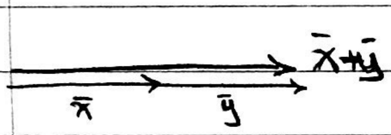
$= \left(\sum_{i=1}^{n} (-x_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

$= \|\bar{x}\|.$



είναι η γωνία μεταξύ $-\bar{x}$ και $\bar{y}$





Παρατηρούμε ότι (δηλ. «με το μάτι») μάλλον (είναι έτσι;) ισχύει $\|\bar{x}+\bar{y}\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ αν (και μόνο αν;) $\theta = 0$. Πώς μπορούμε να το δείξουμε;

Καταρχάς, τι είναι το ϑ;

$\cos\vartheta = \dfrac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|}$

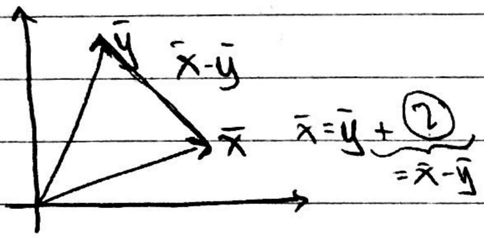
Θέμα 0 [5]

Εκφράστε το $\|\bar{x}+\bar{y}\|$ με χρήση του $\|\bar{x}\|$, $\|\bar{y}\|$ και της γωνίας θ μεταξύ των $\bar{x}$ και $\bar{y}$.

$\|\bar{x}+\bar{y}\| = \sqrt{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}+\bar{y})} \Rightarrow \|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}+\bar{y}) = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\underbrace{\bar{x}\bar{y}}_{=\cos\vartheta\,\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}$

Άρα για να ισχύει $\|\bar{x}+\bar{y}\| = \|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|)^2 = \|\bar{x}\|^2+\|\bar{y}\|^2+2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$ δηλ. $\cos\theta = 1 \iff \theta = 0 \iff$ $\theta\in[0,\pi]$.

(7) Η απόσταση δύο σημείων $\bar{x}$ και $\bar{y}$ είναι $\|\bar{x}-\bar{y}\|$



Με τα (α) - (ζ) είδαμε τον $\mathbb{R}^n$ ως Ευκλείδιο χώρο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ - 1: Εκτός από την Ευκλείδια νόρμα (ή νόρμα 2) $\|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ υπάρχουν στον $\mathbb{R}^n$ και άλλες νόρμες, όπως η νόρμα $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ και η νόρμα $\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_i|,\ i=1,\dots,n\}$

ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι πράγματι οι συναρτήσεις $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι νόρμες.

$\bar{x} \to \|\bar{x}\|_1$